Sistemas Lineares via Equação Matricial

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Paulista - Unip, Campus Swift Campinas

20 de abril de 2020

Vimos na aula passada que o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}, \tag{1}$$

possui solução $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

Vimos na aula passada que o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}, \tag{1}$$

possui solução $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

Forma de Equação Matricial: Primeiro constrói-se uma matriz (vetor) coluna composta pelas variáveis do sistema linear:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vimos na aula passada que o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}, \tag{1}$$

possui solução $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

Forma de Equação Matricial: Primeiro constrói-se uma matriz (vetor) coluna composta pelas variáveis do sistema linear:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Segundo, constrói-se uma matriz formada pelos coeficientes do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Terceiro, constrói-se uma matriz (vetor) coluna formada pelos valores resultantes do sistema:

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Terceiro, constrói-se uma matriz (vetor) coluna formada pelos valores resultantes do sistema:

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que o sistema (1) pode ser obtido pelo produto

$$Ax = b$$

Terceiro, constrói-se uma matriz (vetor) coluna formada pelos valores resultantes do sistema:

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que o sistema (1) pode ser obtido pelo produto

$$Ax = b$$

Pois,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Terceiro, constrói-se uma matriz (vetor) coluna formada pelos valores resultantes do sistema:

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que o sistema (1) pode ser obtido pelo produto

$$Ax = b$$

Pois,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases},$$

Como lidar com esse problema via matrizes?

Para estudar a existência e unicidade de solução, precisa-se estudar a matriz dos coeficiente A.

Como lidar com esse problema via matrizes?

Para estudar a existência e unicidade de solução, precisa-se estudar a matriz dos coeficiente A.

Se $det(A) \neq 0$, então o sistema possui **única** solução. Pois a matriz A possui inversa, e assim a solução é dada por

Como lidar com esse problema via matrizes?

Para estudar a existência e unicidade de solução, precisa-se estudar a matriz dos coeficiente A.

Se $det(A) \neq 0$, então o sistema possui **única** solução. Pois a matriz A possui inversa, e assim a solução é dada por

$$Ax = b \;\Rightarrow\; (A^{-1})Ax = (A^{-1})b \;\Rightarrow\; I.x = A^{-1}b \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}$$

Como lidar com esse problema via matrizes?

Para estudar a existência e unicidade de solução, precisa-se estudar a matriz dos coeficiente A.

Se $det(A) \neq 0$, então o sistema possui **única** solução. Pois a matriz A possui inversa, e assim a solução é dada por

$$Ax = b \;\Rightarrow\; (A^{-1})Ax = (A^{-1})b \;\Rightarrow\; I.x = A^{-1}b \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}$$

Se $det(A) = 0$, então o sistema possui **infintas** soluções ou **nenhuma** solução, dependendo dos valores da matriz coluna b.

No exemplo anterior,

$$det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1.1 - (-1).(1) = 2 \neq 0$$

No exemplo anterior,

$$det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1.1 - (-1).(1) = 2 \neq 0$$

Portanto, existe solução única que é dada por

$$x = A^{-1}b \quad = \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

No exemplo anterior,

$$det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1.1 - (-1).(1) = 2 \neq 0$$

Portanto, existe solução única que é dada por

$$\begin{aligned} x = A^{-1}b &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

No exemplo anterior,

$$det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1.1 - (-1).(1) = 2 \neq 0$$

Portanto, existe solução única que é dada por

$$\begin{aligned} x = A^{-1}b &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

No exemplo anterior,

$$det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1.1 - (-1).(1) = 2 \neq 0$$

Portanto, existe solução única que é dada por

$$\begin{aligned} x = A^{-1}b &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, o que significa $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

De modo geral

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

é equivalente a

De modo geral

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

é equivalente a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

De modo geral

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

em que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Exercício proposto

Verifique se os sistemas abaixo possuem solução exata ou não.

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 = 12 \end{cases}$$

c)

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Obrigado pela atenção!

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: vinicius.wasques@docente.unip.br

Departamento de Engenharia, Ciência da Computação e Sistemas de Informação

site: https://viniciuswasques.github.io/home/